第７講　極限の基本

7

［A］ 次の極限を求めよ．ただし，n は自然数，x は実数とする．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2+3x+1}+x+1)$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\log\frac{x-a}{1-a}$　$(0<a<1)$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\cos\pi x$

(8) $\displaystyle\lim_{x\to 1+0}\frac{(x-1)^2}{|x^2-1|}$

(9) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-3}\sin\frac{1}{x}$

(10) $\displaystyle\lim_{x\to 1}([2x]-[x])$

(11) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{[3x]}{x}$

(12) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3^{\sqrt{x^2+x+2}}}{3^x}$

(13) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(1-\cos x)}{x^2}$

［B］ 等式 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{ax+b}{\cos x}=1$ が成り立つとき，定数 a，b の値を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第７講　極限の基本

7　$\lim_{x \to \infty}(\sqrt{x^2+1}+ax+1)$ は $a=$ □ であるとき，かつそのときに限り極限値 □ をもつ.

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第７講　極限の基本

7

［A］　次の極限を求めよ．ただし，n は自然数，x は実数とする．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3x+1}+x+1)$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\log\frac{x-a}{1-a}$　$(0<a<1)$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\cos\pi x$

(8) $\displaystyle\lim_{x\to1+0}\frac{(x-1)^2}{|x^2-1|}$

(9) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-3}\sin\frac{1}{x}$

(10) $\displaystyle\lim_{x\to1}([2x]-[x])$

(11) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{[3x]}{x}$

(12) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3^{\sqrt{x^2+x+2}}}{3^x}$

(13) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin(1-\cos x)}{x^2}$

［B］　等式 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{ax+b}{\cos x}=1$ が成り立つとき，定数 a，b の値を求めよ．

【答】　［A］　(1) $\log2$　(2) $\frac{1}{2}$　(3) $\frac{1}{e}$　(4) $-\frac{1}{2}$　(5) 0　(6) $\frac{1}{1-a}$　(7) 0　(8) 0　(9) 1

(10) 1　(11) 3　(12) $\sqrt{3}$　(13) $\frac{1}{2}$

［B］　$a=-1$，$b=\frac{\pi}{2}$

【解説】

［A］　(1)　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{(\log2)x}-1}{(\log2)x}\cdot\log2=\mathbf{\log2}$

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x+x^2}+1}\cdot\frac{1+x}{2}=\mathbf{\frac{1}{2}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{-n}\right\}^{-1}=e^{-1}=\boldsymbol{\frac{1}{e}}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3x+1}+x+1)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+1+\frac{1}{x}}=\boldsymbol{-\frac{1}{2}}$

(5) $x-\dfrac{\pi}{2}=t$ とおくと

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}=\lim_{t\to0}\frac{1-\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}=\lim_{t\to0}\frac{1-\cos t}{-\sin t}=\lim_{t\to0}\frac{-\sin t}{1+\cos t}=\mathbf{0}$$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\log\frac{x-a}{1-a}=\lim_{x\to1}\frac{\log\left(1+\frac{x-1}{1-a}\right)}{\frac{x-1}{1-a}}\cdot\frac{1}{1-a}=\boldsymbol{\frac{1}{1-a}}$

(7) $\displaystyle\left|\frac{1}{x^2}\cos\pi x\right|\leqq\frac{1}{x^2}\to0$ $(x\to\infty)$ より　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\cos\pi x=\mathbf{0}$

(8) $\displaystyle\lim_{x\to1+0}\frac{(x-1)^2}{|x^2-1|}=\lim_{x\to1+0}\frac{(x-1)^2}{x^2-1}=\lim_{x\to1+0}\frac{x-1}{x+1}=\mathbf{0}$

(9) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-3}\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{3}{x}}\cdot\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\mathbf{1}$

(10) $\displaystyle\lim_{x\to1+0}([2x]-[x])=\lim_{x\to1+0}(2-1)=1$，$\displaystyle\lim_{x\to1-0}([2x]-[x])=\lim_{x\to1-0}(1-0)=1$ より

$\displaystyle\lim_{x\to1}([2x]-[x])=\mathbf{1}$

(11) $3x-1<[3x]\leqq3x$ より $3-\dfrac{1}{x}<\dfrac{[3x]}{x}\leqq3$ であり，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{1}{x}\right)=3$ より　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{[3x]}{x}=\mathbf{3}$

(12) $\dfrac{3^{\sqrt{x^2+x+2}}}{3^x}=3^{\sqrt{x^2+x+2}-x}$ であり $\sqrt{x^2+x+2}-x=\dfrac{1+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+1}\to\dfrac{1}{2}$ $(x\to\infty)$

なので　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3^{\sqrt{x^2+x+2}}}{3^x}=\boldsymbol{\sqrt{3}}$

(13) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin(1-\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(1-\cos x)}{1-\cos x}\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos x}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

［B］ $x-\dfrac{\pi}{2}=t$ とおくと，$x\to\dfrac{\pi}{2}$ のとき $t\to 0$

$$\frac{ax+b}{\cos x}=\frac{a\left(t+\dfrac{\pi}{2}\right)+b}{\cos\left(t+\dfrac{\pi}{2}\right)}=\frac{at+\left(\dfrac{a}{2}\pi+b\right)}{-\sin t}$$

ここで $\dfrac{a}{2}\pi+b\neq 0$ とすると極限は発散するので不適.

$$\text{ゆえに}\quad \frac{a}{2}\pi+b=0 \qquad \therefore\quad b=-\frac{a}{2}\pi$$

このとき

$$\frac{at}{-\sin t}=-a\cdot\frac{t}{\sin t}\to -a\ \ (t\to 0) \qquad \therefore\quad -a=1$$

よって　$\boldsymbol{a=-1,\ b=\dfrac{\pi}{2}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第７講　極限の基本

7　$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}+ax+1)$ は $a=$［　　］であるとき，かつそのときに限り極限値［　　］をもつ．

【答】　順に，-1，1

【解説】

$a\geqq 0$ のとき

$$\sqrt{x^2+1}+ax+1$$
$$=x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+a+\frac{1}{x}\right)\to\infty\ (x\to\infty)$$

$a<0$ のとき $a=-b$ とおくと $b>0$

$$\sqrt{x^2+1}+ax+1$$
$$=\sqrt{x^2+1}-bx+1$$
$$=\frac{(x^2+1)-(bx-1)^2}{\sqrt{x^2+1}+bx-1}$$
$$=\frac{(1-b^2)x^2+2bx}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+b-\frac{1}{x}\right)}$$
$$=\frac{(1-b^2)x+2b}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+b-\frac{1}{x}}\quad\cdots\cdots①$$

ここで　$1-b^2\neq 0$ とすると①は収束しない．よって

$$1-b^2=0\qquad\therefore\quad b=1\quad \text{すなわち，} a=\mathbf{-1}$$

このとき

$$①=\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1-\frac{1}{x}}\to\mathbf{1}\ (x\to\infty)$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。